Taller de preparación OME 2017

Problema 1 (Canada 1997/4). El punto O se encuentra en el interior del paralelogramo ABCD de tal forma que $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$. Probar que $\angle OBC = \angle ODC$.

Problema 2 (Canada 1990/3). Sea ABCD un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales se cortan en P. Sean W, X, Y, Z los puntos de corte de las perpendiculares desde P con AB, BC, CD, DA, respectivamente. Demostrar que WX+YZ=XY+WZ.

Problema 3 (IMO 2008/1). Sea H el ortocentro de un triángulo agudo ABC. La circunferencia R_A de centro el punto medio de BC y que pasa por H corta a BC en los puntos A_1 y A_2. Igualmente definimos los puntos B_1, B_2, C_1 y C_2. Probar que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, y C_2 son concíclicos.

Problema 4 (IMO 2006/1). Sea ABC un triángulo e I su incentro. Un punto P en el interior del triángulo cumple que $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Demostrar que $AP \geq AI$ y que hay igualdad si y solamente si $P = I$

Problema 5 (USAMO 2010/4). Sea ABC un triángulo con $\angle A = 90^\circ$. Los puntos D y E se encuentran en los lados AC y AB, respectivamente, tal que $\angle ABD = \angle DBC$ y $\angle ACE = \angle ECB$. Los segmentos BD y CE se cortan en I. Determinar si es posible que los segmentos AB, AC, BI, ID, CI, IE tengan todos longitudes enteras.

Problema 6 (IMO Shortlist 2006/G3). Sea ABCDE un pentágono convexo tal que

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \text{ y } \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE.$$

Las diagonales BD y CE se cortan en P . Probar que AP es la mediana de CD.

Problema 7 (IMO 2001/5). Sea ABC un triángulo. Sea AP la bisectriz de $\angle BAC$ y BQ la bisectriz de $\angle ABC$, con P en BC y Q en AC. Si $AB + BP = AQ + QB$ y $\angle BAC = 60^\circ$, hallar los ángulos del triángulo.